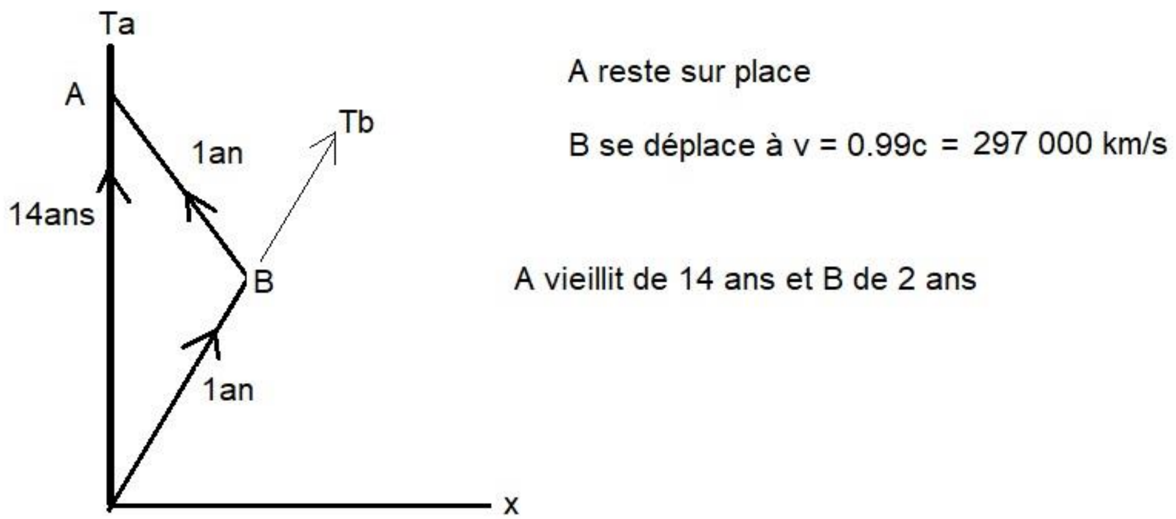
Le paradoxe des jumeaux en Relativité Restreinte

On considère deux jumeaux A et B. A reste immobile dans son repère, tandis que B s'éloigne à la vitesse v = 0.99 c, c étant la vitesse de la lumière, soit v = 297 000 km/s.

Selon sa propre horloge, B s'éloigne pendant un an puis fait demi-tour et revient vers A à la même vitesse.

Quand B retrouve A, B a vieilli de 2 ans et A de 14 ans.



Pour comprendre ce phénomène il faut introduire la notion de **temps propre.**

Le temps propre de B est celui de l'horloge qui l'accompagne.

Le temps de A en comparaison est impropre.

Cette asymétrie reflète celle des jumeaux : B subit au moins deux accélérations, au départ et au demi-tour, tandis que A n'en subit aucune.

Calcul du temps propre

La relation entre Ta et Tb est fournie par la transformation de Lorentz

$$\Delta Tb = \frac{\Delta Ta - v * \frac{\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

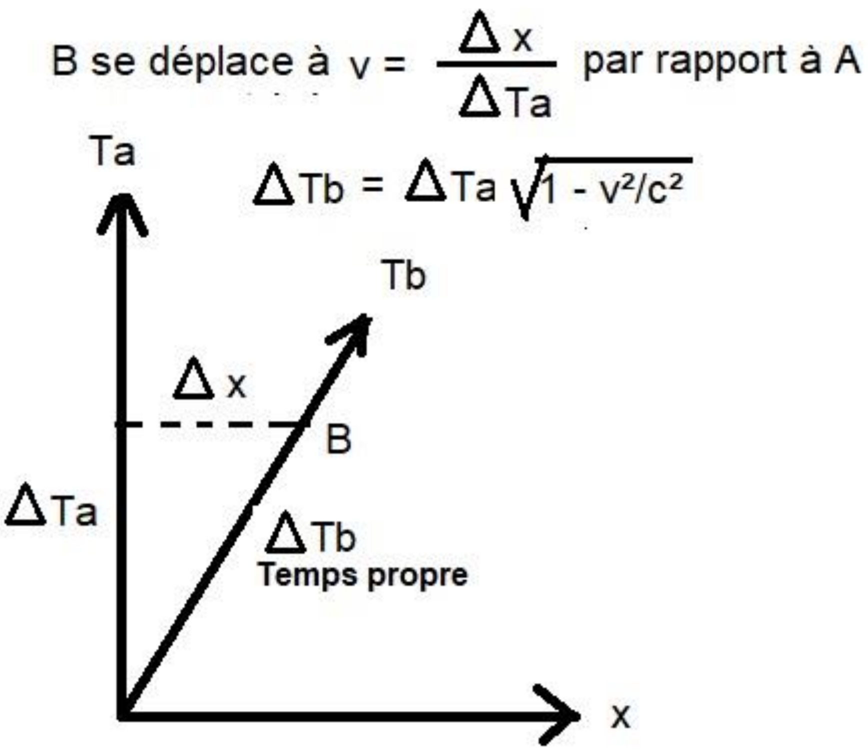
On remplace Δx par $v\Delta Ta$

$$\Delta Tb = \frac{\Delta Ta\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Soit finalement pour le temps propre

$$\Delta Tb = \Delta Ta\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La racine carrée étant toujours inférieure à 1, on voit que temps propre est toujours inférieur au temps impropre.



On notera que, contrairement à certaines explications, il n’est nul besoin de faire appel à la Relativité Générale car la gravité n’est pas en jeu et les accélérations de B peuvent être minimisées autant que désiré.

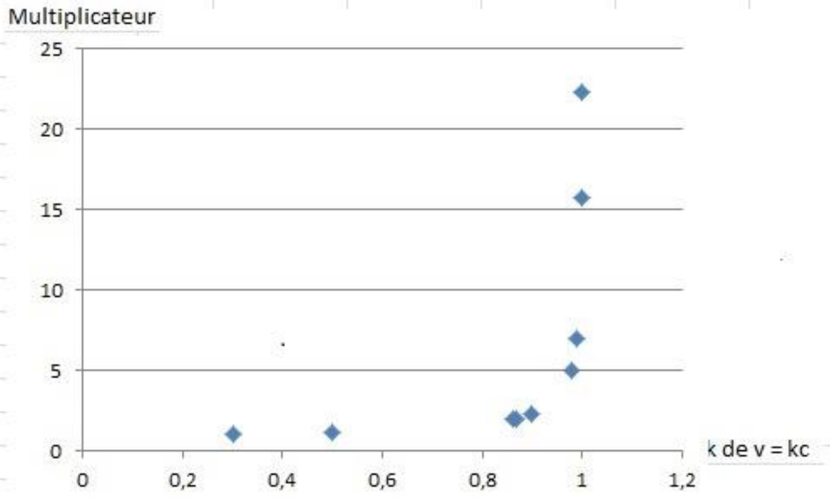
Dans la pratique, on mesure chaque jour des **muons** arrivant de l’espace à très grande vitesse, tel un jumeau B, par rapport au laboratoire sur Terre, assimilable au jumeau A.

Le temps propre de vie d’un muon est Tb = 2.2 µs. Pour nous, Ta =35 µs ce qui facilite grandement son observation (voir http://loutrel.org/Muon.html).

Sur la disparition de la simultanéité, voir aussi http://loutrel.org/Simultan%C3%A9it%C3%A9.html

Variation du coefficient multiplicateur

k de v = kc	Multiplicateur
0,5	1,15
0,3	1,04
0,86	1,96
0,87	2,03
0,9	2,3
0,98	5
0,99	7
0,998	15,8
0,999	22,3

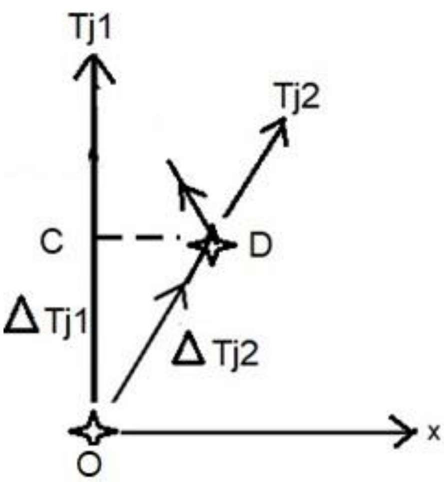


A 0.9c le temps est multiplié par 2.3
A 0.999c le temps est multiplié par 22.3

Une autre approche avec l'intervalle d'espace-temps

Sans faire appel aux formules de Lorentz, on utilise ici la **constance de l'intervalle d'espace-temps** (spatio-temporel) entre deux événements quel que soit le référentiel (repère).

Cette fois le jumeau fixe est J1 et J2 le jumeau voyageur à la vitesse v.



OD intervalle spatio-temporel
entre les événements O et D

De valeur constante
quelquesoit le repère
J1 ou J2

Entre l'évènement O quand J2 démarre et l'évènement D quand il change de direction, la **distance dans l'espace-temps Dist** est calculée par cette formule générale

Dist² = c²$\Delta T^2 - \Delta \boldsymbol{x}^2 - \Delta \boldsymbol{y}^2 - \Delta \boldsymbol{z}^2$ valable pour tout référentiel

Ici, pour une seule dimension d'espace

Dist² = c²$\Delta T^2 - \Delta x^2$

Pour le jumeau J1, dans son référentiel l'intervalle OD vaut

OD² = $c^2 \Delta Tj1^2 - CD^2$

Et comme pour J1

CD = v $\Delta Tj1$

OD² = $c^2 \Delta Tj1^2$ - v²$\Delta Tj1^2$

Pour le jumeau J2 qui est fixe, à l'origine de son référentiel mobile, Δx^2 = 0

OD² = c²$\Delta Tj2^2$

En égalant ces deux valeurs

c²$\Delta Tj2^2$ = $c^2 \Delta Tj1^2$ - v²$\Delta Tj1^2$

$= c^2 \Delta Tj1^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$

Et l'on retrouve bien la relation entre les durées

$$\Delta Tj2 = \Delta Tj1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

On notera que pour J1 l'intervalle OD d'espace-temps vaut

OD² = OC² - CD²   donc OD plus court que OC

contrairement à l'espace 3-Dhabituel où OD serait plus long que OC par la relation de Pythagore

OD² = OC² + CD²

PhL   http://loutrel.org/