

LOI STATISTIQUE DE BAYES

On va montrer l'intérêt de ce théorème due au révérend **Thomas Bayes**, publié en 1763, en l'appliquant à deux exemples concrets : un test antidopage et le choix entre deux urnes.

Test antidopage

On considère une population d'individus dont 10 % sont susceptible de se doper.
Pour les dépister il existe un test efficace à 90 %.

En appliquant le théorème, on va prouver que l'application du test à l'ensemble de la population ne **détectera que 50 % des dopés, et non 90 %** comme il est tentant de le croire !

Le théorème s'écrit

$$P(A/B) = P(B/A) * P(A) / P(B)$$

$P(A/B)$ et $P(B/A)$ sont des probabilités **conditionnelles**.

Cela signifie que $P(A/B)$ est la probabilité que l'événement A se manifeste **sachant que** l'événement B a été observé.

Appliqué au test ci dessus :

A : individu dopé

B : Résultat du test : + dopé, - non dopé

$P(A/B) = P(\text{dopé}/+)$ c'est le résultat recherché : la probabilité de détecter un dopé quand le test a été positif

$P(B/A) = P(+/\text{dopé}) = 0,9$ le test + a 90 % de probabilité de détecter un dopé soit 0,9

$P(A) = P(\text{dopé}) = 10 \% \text{ soit } 0,1$

En regroupant le numérateur

$$P(B/A) * P(A) = 0,9 * 0,1$$

$P(B)$ est la **probabilité totale** d'un test +

$$P(B) = P(+/\text{dopé}) * P(\text{dopé}) + P(+/\text{non dopé}) * P(\text{non dopé})$$

$$P(B) = 0,9 * 0,1 + 0,1 * 0,9$$

Soit finalement

$$P(A/B) = P(\text{dopé}/+) = (0,9 * 0,1) / (0,9 * 0,1 + 0,1 * 0,9) = 1/2 = 0,5$$

Ce test censé détecter 90 % des dopés **n'en détecte donc que 50 %**, et par conséquent génère 50 % de « **faux positifs** » : positif au test mais non dopé.

Pire : si la proportion de dopés décroît de 10 % à 1 %, le même test ne détectera que 8,3 % de dopés.

$P(\text{dopé}/+) = (0,9 * 0,01) / (0,9 * 0,01 + 0,1 * 0,99) = 0,009 / (0,009 + 0,1 * 0,99) = 9 / (9 + 99) = 9/108 = 0,083$ soit 8,3 % de détection valable et 91,7 % de faux-positifs.

On voit ainsi combien une **population clairsemée dégrade les performances d'un test**.

CHOIX entre DEUX URNES

Deux Urnes contiennent chacune 40 boules **B**lanche ou **N**oire

$$U1 = 10N + 30B$$

$$U2 = 20N + 20B$$

On tire une boule d'une urne au hasard, elle est Blanche.

Quelle est la probabilité que cette boule provienne de U1 ?

Notons $P(U1 \text{ choisie} / \text{boule Blanche tirée}) = P(U1/B)$

La formule de Bayes donne ici

$$P(U1/B) = P(B/U1) * P(U1) / P(B)$$

$$P(B/U1) * P(U1) = (30/40) * 1/2 = 3/8 \text{ car il y a 30B dans U1 et U1 a été choisie au hasard}$$

$$P(B) = P(B/U1)P(U1) + P(B/U2)P(U2) \text{ probabilité totale de tirer une Blanche}$$

$$= (30/40)*1/2 + (20/40)*1/2$$

$$= 3/8 + 1/4 = 5/8$$

$$P(U1/B) = (3/8)/(5/8) = 3/5 = 0,6$$

Il y a donc 60 % de chance que cette boule blanche provienne de U1